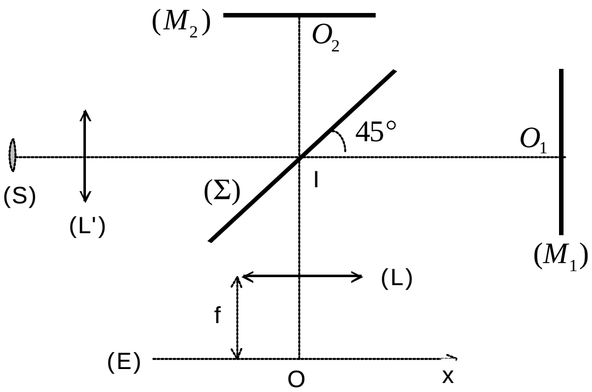
-EXERCICE 30.10-

· ENONCE :

« Interféromètre de Michelson »



On considère le dispositif interférentiel de Michelson. La lame séparatrice est supposée d'épaisseur négligeable , ce qui rend la lame compensatrice inutile.
La source (S) est **étendue** : chaque point de la source (vu sous un angle i depuis le centre de la lentille (L') de collimatation) donnera un faisceau parallèle, faisant le même angle i avec l'axe optique.
Les 2 miroirs sont perpendiculaires, et l'on a:

$IO_1 = IO_2 + d$

Les interférences sont observées sur un écran (E) situé dans le plan focal d'une lentille de focale m.

• La source est monochromatique, de longueur d'onde $l = 0{,}5461\ mm$ (raie verte du mercure) ; on donne par ailleurs la distance $d = 3276{,}6\ mm$.

Rq : les réflexions des rayons sur la séparatrice ne sont pas de même nature ; cependant, on considérera que le traitement de surface est tel que ces réflexions n'introduisent pas de déphasage supplémentaire entre les rayons « séparés » au niveau de (Σ).

1) Déterminer la loi $\mathrm{E}(x)$ donnant l'éclairement en un point M de l'écran, avec $x = OM$.

Quelle est la forme des franges d'interférence ?

Les franges sont-elles localisées ? Pourrait-il en être autrement ?

Comment appelle-t-on ce type de franges ? Pourquoi dit-on que l'interféromètre de Michelson est réglé en « lame d'air » ?

2) Calculer l'ordre d'interférence p_0 au centre O, ainsi que le rayon des 3 premiers anneaux brillants sur l'écran (E).

3) <u>Enoncé 1</u> : «quand on regarde l'expression du rayon x_k du k-ème anneau brillant, on constate que ce rayon augmente lorsque la distance d diminue ».

<u>Enoncé 2</u> : « en TP, on sait que l'on se rapproche du contact optique ($d \to 0$) lorsque les anneaux se contractent et disparaissent par le centre ».

Y a-t-il contradiction entre ces deux énoncés (vrais) ?

4) Sur le trajet IO_1, on insère une lame de mica à faces parallèles, parallèlement au miroir (M_1) ; le mica a un indice $n = 1{,}53$ et l'épaisseur D de la lame est inconnue.

On observe un « défilement » de 25 franges de même nature sur l'écran (E) : quelle est l'épaisseur de la lame ?

5) La source précédente est remplacée par une lampe à vapeur de sodium dont, par filtrage, on n'a conservé que le doublet jaune, de même intensité I_0 : $l_1 = 0{,}5890\ mm$ et $l_2 = 0{,}5896\ mm$.

Déterminer l'éclairement au centre O en faisant apparaître un facteur de visibilité $V(d)$

6) Montrer que la mesure de la variation de distance Δd (obtenue par le déplacement du chariot sur lequel est monté le miroir M_1) entre 2 positions où $V(d)=0$, permet de calculer $\Delta l = l_2 - l_1$; calculer Δd .

Retrouver ce résultat par un calcul direct, en exploitant la notion de système de franges en coïncidence ou en anti-coïncidence.

Quel est l'inconvénient d'effectuer le réglage d'un « Michelson » en utilisant une lampe à vapeur de sodium ?

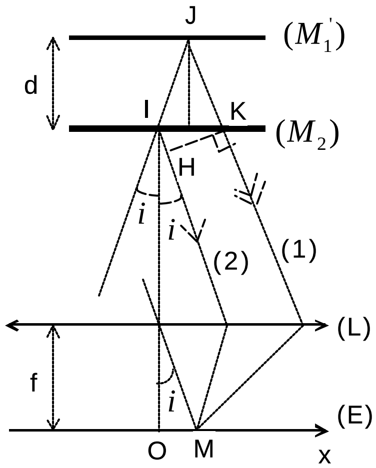
OPTIQUE ONDULATOIRE

EXERCICE

· CORRIGE :

« Interféromètre de Michelson »

1)



Dans le cours, nous avons vu que pour le calcul des chemins optiques, on pouvait remplacer le miroir réel (M_1) par un miroir virtuel ($M_1^{'}$) symétrique du précédent par rapport à la séparatrice (une symétrie plane conserve les distances.
D'après le théorème de Malus, toute différence de marche entre les rayons (1) et (2) acquise avant le plan passant par les points H et K sera conservée par la suite .
D'autre part , les rayons (1) et (2) sont confondus jusqu'au point I; on a donc :

$$d_{1/2} = (IJK) - (IH) = 2IJ - IH$$

• Or : $IJ = \dfrac{d}{\cos i}$ et $IH = IK \sin i = 2d \tan i \times \sin i \Rightarrow d_{1/2} = 2d(\dfrac{1}{\cos i} - \dfrac{\sin^2 i}{\cos i}) \Rightarrow \boxed{d_{1/2} = 2d \cos i}$

Par ailleurs, l'angle i restant petit (rappelons que du point de vue de l'optique géométrique, nous nous efforçons de travailler dans les conditions où l'approximation de Gauss est valable), on a :

$$i \simeq \tan i = \frac{x}{f} \Rightarrow \cos i \simeq 1 - \frac{i^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2f^2} \Rightarrow \boxed{d_{1/2} \simeq 2d(1 - \frac{x^2}{2f^2})}$$

Rq : les déphasages éventuels dus aux réflexions (de même nature) sur les miroirs (M_1) et (M_2) sont identiques.

• On sait que l'éclairement est donné par la relation :

$$E = 2E_0(1 + \cos 2p\, p) = E_{max} \times \cos^2(\frac{2p\, d \cos i}{l}) \Rightarrow \boxed{E(x) = E_{max} \times \cos^2[\frac{2p\, d}{l}(1 - \frac{x^2}{2f^2})]} \quad (1)$$

• Les franges sont les lieux des points de même éclairement ; ici, il s'agit de $x = cste$, où x est la **distance** d'un point M au point O $\Rightarrow$ les franges sont des **cercles** de centre O (à condition que la source (S) ait la symétrie de révolution).

• Les franges sont **localisées à l'infini** (visibles dans le plan focal de la lentille (L)) ; cette localisation est due au fait que la source est **étendue** : ce n'est qu'à l'infini, où seuls des rayons parallèles entre eux interfèrent, que les systèmes de franges dus aux différents points de la source incohérents entre eux, ne se brouillent pas.

Pour une source **ponctuelle** (mais qui émet suffisamment de lumière pour que le phénomène soit visible...), les franges sont **délocalisées** et constituent un réseau d'hyperboloïdes (un faisceau laser de très faible section peut s'approcher d'une telle source idéalisée).

• On dit que l'on observe des « **franges d'égale inclinaison** », car l'éclairement E ne dépend que de l'angle d'inclinaison i par rapport à l'axe optique.

Le « Michelson » est réglé en « **lame d'air** », car le miroir réel (M_2) et le miroir virtuel $(M_1^{'})$ sont parallèles et constituent ainsi une lame d'air virtuelle (rappelons que cette configuration permet au miroir virtuel de pouvoir traverser le miroir réel au voisinage du contact optique).

2) • Au centre, on a : $\boxed{p_0 = \dfrac{2d}{\lambda} = \dfrac{2\times 3277}{0{,}5461} = 12000}$ Rq : $p_0 \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ le centre est **brillant**.

• $p(x) = \dfrac{2d}{\lambda}(1 - \dfrac{x^2}{2f^2})$ $\Rightarrow$ l'ordre d'interférence **diminue** lorsque x **augmente**, donc lorsqu'on **s'éloigne** du centre O (contrairement à ce qui se passe avec le dispositif des fentes d'Young).

D'où, pour le k-ème anneau brillant, il vient : $p_k = p_0 - k$ $\Rightarrow$ $k = \dfrac{dx_k^2}{\lambda f^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_k = f\sqrt{\dfrac{k\lambda}{d}}}$ (2)

<u>Application numérique</u> : $\boxed{x_1 = 12{,}9\ mm\ ;\ x_2 = 18{,}3\ mm\ ;\ x_3 = 22{,}4\ mm}$

(les anneaux sont bien espacés, et leur rayon croît proportionnellement à $\sqrt{k}$)

3) • La relation (1) montre qu'effectivement le rayon du k-ème anneau brillant visible à un instant donné sur l'écran augmente lorsque l'on se rapproche du contact optique, c'est-à-dire lorsque d diminue.

• Cependant, posons-nous la question : qu'est-ce qu'un anneau donné ? C'est un ordre d'interférence donné (ordre qui fixe l'éclairement) $\Rightarrow$ lorsqu'on déplace le miroir (M_1) en faisant diminuer d et que l'on « suit des yeux » l'évolution d'un anneau particulier, la grandeur $p(i) = \dfrac{2d\cos i}{\lambda}$ reste constante : si $d \searrow$, alors $\cos i \nearrow$ et $i \searrow$.

• L'angle i étant l'angle sous lequel on voit l'anneau considéré depuis le centre de la lentille (L), celui-ci se contracte effectivement et finit par disparaître par le centre O : les deux énoncés ne sont donc pas contradictoires mais complémentaires.

En effet, l'anneau de rang k à $t=0$ devient le (k-1)-ème à $t \succ 0$ etc… $\Rightarrow$ l'énoncé signifie simplement qu'au moment où le (k+1)-ème anneau est devenu le k-ème, son rayon est plus grand que celui du «précédent k-ème anneau », donc que pour un écran (E) de taille finie, on verra de **moins en moins** d'anneaux sur ce dernier.

4) L'introduction de la lame va rallonger le chemin optique du rayon (1), donc faire varier la différence de marche $d_{1/2}$; en retranchant le chemin que parcourait le rayon (1) dans l'air à ce qu'il parcourt maintenant dans le mica, on obtient : $\Delta d_{1/2} = 2(n-1)D$.

Si 25 franges de même nature ont défilé, c'est que l'ordre d'interférence a varié de 25, d'où :

$\Delta p = \Delta(\dfrac{d_{1/2}}{\lambda}) = 25 = \dfrac{2(n-1)D}{\lambda}$ $\Rightarrow$ $\boxed{D = \dfrac{25\lambda}{2(n-1)}}$ <u>A.N</u> : $\boxed{D = 12{,}88\ mm}$

5) Les 2 radiations du doublet du sodium sont incohérentes entre elles (incohérence temporelle), on peut se contenter de sommer les éclairements au centre dues à chacune d'elle :

$$\mathrm{E}(0) = \mathrm{E}_{\lambda_1}(0) + \mathrm{E}_{\lambda_2}(0) = 2I_0(1+\cos\frac{4\pi d}{\lambda_1}) + 2I_0(1+\cos\frac{4\pi d}{\lambda_1}) = 4I_0\{1+\cos[2\pi d(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2})]\times\cos[2\pi d(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2})]$$

• En posant $\lambda_0 = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$ (= longueur d'onde moyenne du doublet), $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ et en confondant le produit $\lambda_1 \times \lambda_2 = \lambda_0^2 - \dfrac{(\Delta\lambda)^2}{4}$ avec λ_0^2, il vient :

$\mathrm{E}(0) = 4I_0[1+V(d)\times\cos(\dfrac{4\pi d}{\lambda_0})]$ avec : $\boxed{V(d) = \cos(2\pi d\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2})}$

6) • $V(d)=0$ pour $2p\,d\,\dfrac{\Delta l}{l_0^2}=(2k+1)\dfrac{p}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta d=\dfrac{l_0^2}{2\Delta l}}$ A.N : $\boxed{\Delta d=289{,}4\ mm}$

Rq : en fait, c'est la détermination de l_0 (spectroscope à réseau par exemple) et la mesure de Δd (valeur suffisamment élevée pour que la précision soit très correcte) qui permettent d'évaluer Δl .

• En fait, il y a brouillage lorsque les systèmes de franges des radiations l_1 et l_2 sont en anti-coïncidence (lorsque les anneaux brillants de l'une coïncident avec les anneaux sombres de l'autre, l'écran est uniformément éclairé, il n'y a plus de contraste) ; dans ce cas, les ordres d'interférence diffèrent d'un demi-entier et l'on peut écrire entre 2 anti-coïncidences successives:

- ♦ pour une distance d : $p_1(0)-p_2(0)=2d(\dfrac{1}{l_1}-\dfrac{1}{l_2})=k+\dfrac{1}{2}$ où $k\in\mathbb{N}$
- ♦ pour une distance $d+\Delta d$: $p_1^{'}(0)-p_2^{'}(0)=2(d+\Delta d)(\dfrac{1}{l_1}-\dfrac{1}{l_2})=k+\dfrac{1}{2}+1$ (pour $\Delta d\succ 0$)

• Il vient alors : $\boxed{\Delta d=\dfrac{l_1 l_2}{2(l_2-l_1)}\simeq\dfrac{l_0^2}{2\Delta l}}$ (résultat identique, mais calcul plus élégant)

Rq : si, par malchance, la position initiale du chariot est voisine d'une anti-coïncidence du doublet de la lampe à vapeur de sodium, on aura beau s'évertuer à régler le parallélisme de la séparatrice et de la compensatrice, l'orthogonalité des miroirs etc…, les franges ne seront pas visibles sur l'écran : on pourra donc préférer, à ce stade, une lampe à vapeur de mercure.